

**Exercice 1** (7 points)

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \left(U_n + \frac{2}{U_n} \right)$ ($n \in \mathbb{N}$)

1/a- Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b- Montrer que la suite U est croissante.

2/ a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - U_n^2 \geq 4$.

b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \geq 2\sqrt{n}$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3/ On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $V_n \leq 4 + \frac{1}{n}$

b- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

4/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} V_k$.

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \geq \frac{1}{n}$.

b- En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $0 \leq S_n - 4(n-1) \leq 2\sqrt{n-1}$

b- Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n^2}{n}$.

Exercice 2 (6 points)

Les questions I et II sont indépendantes.

I-1/ Soit n un entier naturel. On considère les entiers $A = 5n + 3$ et $B = 4n + 1$.

a- Montrer que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de 7.

b- Montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$.

c- En déduire suivant les valeurs de n : $A \wedge B$.

2/ x et y étant deux entiers naturels, on considère l'équation (E) : $4x - 5y = 7$.

a- Montrer que : $4x - 5y = 7 \Leftrightarrow 4(x-3) = 5(y-1)$.

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

3/ Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) vérifiant :

$$\begin{cases} 4a - 5b = 21 \\ ab = 3(a \vee b) \end{cases}$$

II- a et n étant deux entiers naturels non nuls tels que : $n \geq 2$, on considère l'équation (F) : $a^2 + 9 = 5^n$

1// Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $25^n - 1$ est divisible par 3.

2/a- Montrer que si a est une solution de (F) alors a n'est pas un multiple de 3.

b- Soit a une solution de (F). Montrer que $a^2 + 4$ n'est pas divisible par 3.

En déduire que si n est impair alors (F) n'a pas de solutions.

3/ Montrer que si n est pair alors il existe un seul couple (a, n) que l'on déterminera qui vérifie (F).

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{m+1} = (u_m + \frac{2}{u_m}) \end{cases}$$

1) on peut Recurrence que $\forall m \in \mathbb{N}$ on a $u_m > 0$

• $u_0 = 2 > 0$ donc cette propriété est vraie pour $m=0$

• soit $m \in \mathbb{N}$ on suppose que $u_m > 0$ on veut que $u_{m+1} > 0$

on a $u_m > 0$ d'où par l'hypothèse de Recurrence

$$\Rightarrow u_m + \frac{2}{u_m} > 0 \Rightarrow u_{m+1} > 0$$

Conclusion: $\forall m \in \mathbb{N}$ $u_m > 0$

b) $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = u_m + \frac{2}{u_m}$

$$\Rightarrow u_{m+1} - u_m = \frac{2}{u_m} > 0 \quad (\text{car } u_m > 0)$$

$\Rightarrow (u_m)$ est croissante

2) a) $\forall m \in \mathbb{N}$ on a $u_{m+1} = (u_m + \frac{2}{u_m})$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 = (u_m + \frac{2}{u_m})^2$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 = u_m^2 + 2 \times u_m \times \frac{2}{u_m} + (\frac{2}{u_m})^2$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 - u_m^2 = 4 + (\frac{2}{u_m})^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 - u_m^2 \geq 4$$

b) $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $u_{k+1}^2 - u_k^2 \geq 4$

pour $k=0$ $u_1^2 - u_0^2 \geq 4$

pour $k=1$ $u_2^2 - u_1^2 \geq 4$

pour $k=2$ $u_3^2 - u_2^2 \geq 4$

pour $k=3$ $u_4^2 - u_3^2 \geq 4$

$\vdots$

pour $k=m-1, m \in \mathbb{N}^*$ $u_m^2 - u_{m-1}^2 \geq 4$

on fait la somme membre à membre on obtient

$$u_m^2 - u_0^2 \geq \underbrace{4 + 4 + 4 + \dots + 4}_{m \text{ fois}}$$

$$\Rightarrow u_m^2 - 4 \geq 4m$$

$$\Rightarrow u_m^2 \geq 4m + 4$$

$$\Rightarrow u_m^2 \geq 4m + 4 \geq 4m$$

$$\Rightarrow u_m^2 \geq 4m$$

$$\Rightarrow u_m \geq \sqrt{4m} \quad (\text{car } u_m > 0)$$

$$\Rightarrow u_m \geq 2\sqrt{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

• pour $m=0$ $u_0 = 2 \geq 2 \times \sqrt{0} = 0$ vraie d'où $\forall m \in \mathbb{N}$ $u_m \geq 2\sqrt{m}$

2^e méthode (par Recurrence)

on peut Recurrence que $\forall m \in \mathbb{N}$ $u_m \geq 2\sqrt{m}$

• pour $m=0$ $u_0 = 2 \geq 2\sqrt{0}$ vraie pour $m=0$

• soit $m \in \mathbb{N}$ on suppose que $u_m \geq 2\sqrt{m}$

$$\text{on veut que } u_{m+1} \geq 2\sqrt{m+1}$$

d'où la question précédente on a

$$u_{m+1}^2 - u_m^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 \geq 4 + u_m^2 \quad (1)$$

d'où par l'hypothèse de Recurrence on a

$$u_m \geq 2\sqrt{m} \Rightarrow u_m^2 \geq 4m$$

$$\Rightarrow 4 + u_m^2 \geq 4(m+1) \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow u_{m+1}^2 \geq 4(m+1)$

$$\Rightarrow u_{m+1} \geq 2\sqrt{m+1} \quad (\text{car } u_{m+1} > 0)$$

Conclusion: $\forall m \in \mathbb{N}$ $u_m \geq 2\sqrt{m}$

ما ننسأ فالتة ننسأ فالتة

u_m et u_{m+1} قيتا propriete

السؤال الثاني بعدو رقم

في Recurrence

$$\forall m \in \mathbb{N}, (u_m), \sqrt{2}m$$

$$\text{or } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{2}m = +\infty \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = +\infty$$

$$(3) \quad u_{m+1} = u_m^2 - u_m^2 \text{ pour } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{ma } u_{m+1} = (u_m + \frac{2}{u_m})$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 = u_m^2 + 4 + \frac{4}{u_m^2}$$

$$\Rightarrow u_{m+1}^2 - u_m^2 = 4 + \frac{4}{u_m^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_m^2 = 4 + \frac{4}{u_m^2}} \quad (1)$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq 2\sqrt{m} \Rightarrow u_m^2 \geq 4m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_m^2} \leq \frac{1}{4m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \frac{4}{u_m^2} \leq \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 + \frac{4}{u_m^2} \leq 4 + \frac{1}{m}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a } u_m^2 \leq 4 + \frac{1}{m}$$

$$b) \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ mod } 2 \text{ a) } u_{m+1}^2 - u_m^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow u_m^2 \geq 4$$

$$\text{et on sait que } u_m \leq 4 + \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{donc } \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a } 4 \leq u_m \leq 4 + \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_m - 4 \leq \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \quad |u_m - 4| \leq \frac{1}{m}$$

$$\text{comme } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = 4$$

$$4) \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ on a}$$

$$2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = 2 \frac{(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{m}^2 - \sqrt{m-1}^2)}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = \frac{2}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}} \quad (1)$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \text{ on a } m \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{m} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} \geq 1 \cdot \sqrt{m}$$

$$\Rightarrow m \geq \sqrt{m}$$

$$\text{ma } m \geq \sqrt{m} \geq \sqrt{m-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{m} \leq m \\ \text{or } \frac{1}{\sqrt{m-1}} \leq m \end{cases} \Rightarrow \sqrt{m} + \sqrt{m-1} \leq m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} \geq \frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{2}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} \geq \frac{1}{m}} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \quad 2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) \geq \frac{1}{m}$$

$$b) \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ on a}$$

$$\begin{cases} u_m \leq 4 + \frac{1}{m} \\ \text{or } \frac{1}{m} \leq 2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_m \leq 4 + \frac{1}{m} \\ \text{or } 4 + \frac{1}{m} \leq 4 + 2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^* \quad u_m \leq 4 + 2(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \text{ on a } u_k \leq 4 + 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_k - 4 \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\text{pour } k=1 \text{ on a } 0 \leq u_1 - 4 \leq 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$$

$$\text{pour } k=2 \text{ on a } 0 \leq u_2 - 4 \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$\text{pour } k=3 \text{ on a } 0 \leq u_3 - 4 \leq 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\vdots$$

$$\text{pour } k=m-1, m \geq 2 \quad 0 \leq u_{m-1} - 4 \leq 2(\sqrt{m-1} - \sqrt{m-2})$$

$$\text{on fait la somme membre à membre on obtient}$$

$$0 \leq (u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1}) - (4 + 4 + \dots + 4) \leq 2(\sqrt{m-1})$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{m-1} u_k - (m-1) \cdot 4 \leq 2\sqrt{m-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{m-1} u_k - 4(m-1) \leq 2\sqrt{m-1}$$

$$\begin{aligned}
 b) \forall m \geq 2 \text{ on a } S_m &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \quad \left(\text{car } \frac{1}{k} = \frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{u_{k+1}^2 - u_k^2} \right) \\
 &= \frac{u_2^2 - u_1^2}{\cancel{u_2^2 - u_1^2}} + \frac{u_3^2 - u_2^2}{\cancel{u_3^2 - u_2^2}} + \frac{u_4^2 - u_3^2}{\cancel{u_4^2 - u_3^2}} + \frac{u_5^2 - u_4^2}{\cancel{u_5^2 - u_4^2}} + \dots + \frac{u_{m-1}^2 - u_{m-2}^2}{\cancel{u_{m-1}^2 - u_{m-2}^2}} + \frac{u_m^2 - u_{m-1}^2}{\text{enfin par } k=m-1} \\
 &= u_m^2 - u_1^2 \\
 &= u_m^2 - 3
 \end{aligned}$$

Ainsi $\forall m \geq 2$ on a $S_m = u_m^2 - 3$

d'après la question précédente on a $0 \leq S_m - 4(m-1) \leq 2\sqrt{m-1} \quad \forall m \geq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq (u_m^2 - 3) - 4(m-1) \leq 2\sqrt{m-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \leq \frac{2\sqrt{m-1}}{m}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \leq \frac{2\sqrt{m-1}}{m}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \right| \leq \frac{2\sqrt{m-1}}{m}$$

on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{m-1}}{m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{m^2(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2})}}{m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}}}{1} = 0$

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \right) = 0$

or $\forall m \geq 2$ on a $\frac{u_m^2}{m} = \left(\frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \right) + 4 - \frac{1}{m}$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m^2}{m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_m^2}{m} - 4 + \frac{1}{m} \right) + 4 - \frac{1}{m} = 0 + 4 - 0 = 4$$

fin